**§1. Преобразование Лапласа**

**п.1.Оригиналы и изображения**

Основными первоначальными понятиями операционного исчисления являются понятия функции-оригинала и функции-изображения.

***Определение 1.*** *Оригиналом* называется комплекснозначная функция действительного переменного , удовлетворяющая следующим условиям:

1.  при ;
2. функция  – однозначная, кусочно-непрерывная при , т.е. она непрерывна или имеет точки разрыва 1-го рода, причем в каждом конечном интервале оси  таких точек конечное множество;
3. существуют числа  и , такие что для всех  выполняется неравенство

,

т.е. при возрастании  функция  может возрастать не быстрее некоторой показательной функции. Число  называется *показателем роста* .

Заметим, что условию 3) удовлетворяют, например, ограниченные функции (для них можно положить ), степенные  и некоторые другие функции.

Условия  выполняются для большинства функций, описывающих различные физические процессы.

***Определение 2.*** *Изображением оригинала*  называется функция  комплексного переменного , определяемая интегралом Лапласа

. (1)

Операцию перехода от оригинала  к изображению  называют *интегральным преобразованием Лапласа* или *L* – *преобразованием*.

В дальнейшем оригиналы будем обозначать малыми буквами, а их изображения – большими.

Если  – изображение по Лапласу оригинала , то будем писать

 или ;

если  – оригинал для , то этот факт записывается так:

 или .

***Пример 1.*** Полагая, что  для любого , указать, какие из функций являются оригиналами:

а) ; б) ; в) .

***Решение*.**

▲ а) Функция  не является оригиналом, т.к. при  она имеет разрыв 2-го рода: .

б) Т.к. , то функция  является оригиналом с показателем роста .

в) Функция  не является оригиналом, т.к. . ▲

***Теорема 1* *(о существовании изображения)*.** Всякий оригинал  имеет изображение , являющееся однозначной аналитической функцией в полуплоскости , где  – показатель роста функции ,  – полуплоскость комплексной плоскости, расположенная правее оси .

***Следствие (необходимый признак существования изображения).*** Если функция  является изображением функции , то , где  находится в области .

***Замечание.*** Не всякая функция  может служить изображением некоторого оригинала. Например, функция  не является изображением , т.к. .

***Теорема 2* *(о единственности оригинала)*.** Если функция  является изображением двух оригиналов  и , то эти оригиналы совпадают друг с другом во всех точках, в которых они непрерывны.

***Пример 2.*** Найти изображение единичной функции Хевисайда



***Решение*.**

▲ Для функции  условия  выполнены. Т.к.  для любого , то показатель роста .

По формуле (1) имеем: .

Таким образом

 или . ▲ (2)

***Замечание.*** Функция  является простейшей функцией-оригиналом. С ее помощью можно любую функцию, удовлетворяющую только условиям **2)** и **3)**, превращать в оригинал, удовлетворяющий уже всем условиям ***определения 1***. Это делается с помощью выражения:

 (3)

Однако в дальнейшем для простоты записи будем писать вместо  просто , считая, что при  эти функции равны нулю. Например, вместо оригинала  будем писать просто , имея в виду, что и эта функция – оригинал.

***Пример 3.*** Найти изображение функции  где *a* – любое число.

***Решение*.**

▲ Функция  является оригиналом. По формуле (1) имеем:

 если .

Таким образом

. ▲ (4)

***Пример 4.*** Найти изображение функции .

***Решение*.**

▲ 

.

Таким образом

. ▲ (5)

**п.2. Свойства преобразования Лапласа**

Находить изображения по известным оригиналам и оригиналы по известным изображениям, используя только формулу (1), не всегда просто и удобно. Свойства преобразования Лапласа значительно облегчают эту задачу для большого числа разнообразных функций.

1. ***Линейность преобразования Лапласа***

***Теорема 3* *(свойство линейности).*** Пусть  и  – оригиналы и , . Тогда

, где . (6)

Другими словами, линейной комбинации оригиналов соответствует такая же линейная комбинация изображений.

***Пример 5.*** Найти изображение функции 

***Решение*.**

▲ Функция  является линейной комбинацией функций, изображения которых известны:

 (формула (2)),  (формула (4)).

Согласно свойству линейности, имеем:

. Таким образом

. ▲

***Пример 6.*** Найти изображения функций .

***Решение*.**

▲ Пользуясь свойством линейности и формулой (4) находим:

, т. е.

 . ▲ (7)

Аналогично получаем формулу

. (8)

В частности

, . (9)

Далее, , т.е.

. (10)

Далее, , т. е.

. (11)

Аналогично получаем формулу

. (12)

1. ***Подобие***

***Теорема 4 (подобия).*** Если , то т.е. умно-жение аргумента оригинала на положительное число  приводит к делению изображения и его аргумента на это число.

***Пример 7.*** Найти изображение функции , .

***Решение*.**

▲ По формуле (9): . Тогда по теореме подобия для любого :

. ▲

1. ***Смещение (затухание ) в области изображения***

***Теорема 5* *(смещения).*** Если , , то т. е. умножение оригинала на функцию  влечет за собой смещение переменной *р*.

Благодаря этому свойству можно расширить таблицу соответствия между оригиналами и их изображениями:

,

,

, (13)

.

***Пример 8.*** Найти оригинал по его изображению .

***Решение*.**

▲ Преобразуем дробь таким образом, чтобы можно было воспользоваться свойством смещения:

. ▲

1. ***Запаздывание (смещение в области оригинала)***

***Теорема 6* *(запаздывания).*** Если  и , то

 (14)

т.е. запаздывание оригинала на положительную величину  приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания на .

Свойство запаздывания удобно применять при отыскании изображений функций, которые на разных участках задаются различными аналитическими выражениями, а также функций, описывающих импульсные процессы.

***Пример 9.*** Найти изображение оригинала .

***Решение*.**

▲ По формуле (14): . ▲

Функция называется *обобщенной единичной функцией*. Так как , то .

Запаздывающую функцию



можно записать так: .

***Пример 10.*** Найти изображение функции 

***Решение*.**

▲ Данная функция описывает единичный импульс, который можно рассматривать как разность двух оригиналов: единичной функции  и обобщенной единичной функции . Поэтому

. ▲

***Пример 11.*** Найти изображение функции 

***Решение*.**

▲ Запишем функцию-оригинал одним аналитическим выражением, используя для этого функции Хевисайда  и :



.

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим:



Следовательно, изображение функции  будет равно

. ▲